TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC LẦN VI NĂM 2014

Môn thi : **TOÁN**

Thời gian làm bài : 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1 (*2,0 điểm*). Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Đường thẳng Δ đi qua $I(0; 2)$ có hệ số góc k. Tìm k để Δ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt I, A, B. Gọi d_1, d_2 là các tiếp tuyến của (C) tại A, B. Chứng minh rằng điểm I cách đều hai đường thẳng d_1, d_2.

Câu 2 (*1,0 điểm*). Giải phương trình $1 + \sin 2x + \cos 2x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 3 (*1,0 điểm*). Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2^x + x = y + \log_2 y \\ \log_2 x + y = 5 \end{cases}$

Câu 4 (*1,0 điểm*). Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\cos x - \cos^3 x}}{\cos^5 x}\,dx$.

Câu 5 (*1,0 điểm*). Cho hình chóp $S.ABC$ có SBC và ABC là các tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên SA nghiêng với mặt phẳng đáy (ABC) một góc 60°. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Câu 6 (*1,0 điểm*). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$f(x) = \sqrt{5x^2 + 20} + \sqrt{5x^2 - 32x + 64} + \sqrt{5x^2 - 40x + 100} + \sqrt{5x^2 - 8x + 16}$$

Câu 7. (*1,0 điểm*).

Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(1; 5)$, trọng tâm $G(1; 3)$ và trực tâm $H(-23; 17)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C biết $x_B > x_C$.

Câu 8.(*1,0 điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 1)$ và hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2} \quad \text{và} \quad d_2: \frac{x+3}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z}{2}$$

Mặt phẳng (Oxz) cắt hai đường thẳng d_1 , d_2 lần lượt tại các điểm B, C. Tính diện tích tam giác ABC.

Câu 9. (*1,0 điểm*). Cho số phức z thỏa mãn $\frac{\bar{z} - i}{z - 1} = 1 - 2i$.

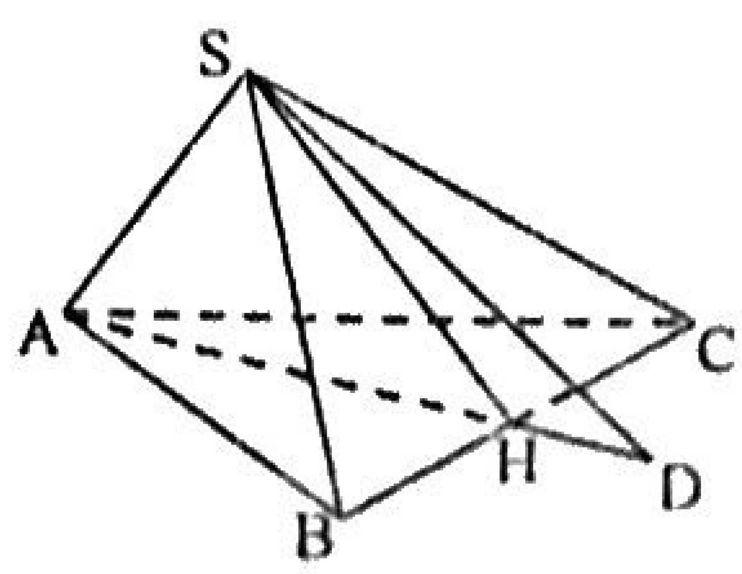
Viết về dạng lượng giác của số phức $w = -\frac{3}{4} - 2z + z^2$.

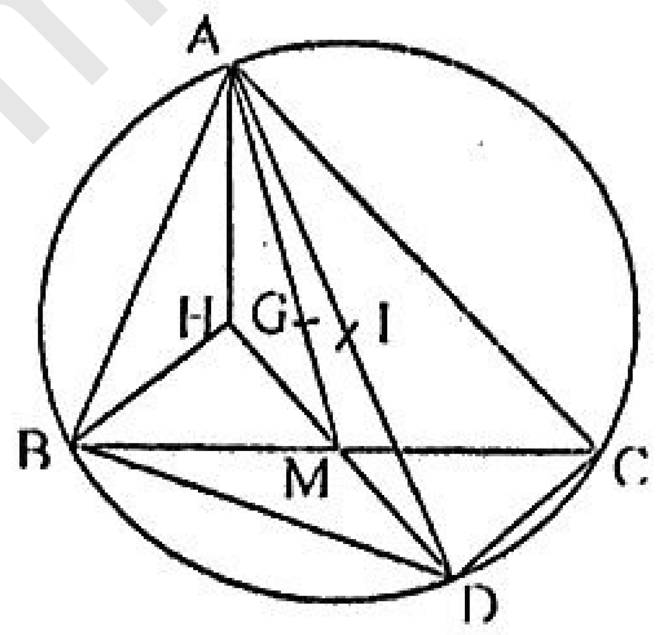
…………**Hết** …………

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM

THI THỬ ĐH LẦN VI - NĂM 2014

Gv.Ths Nguyễn Văn Quý - ĐT 0915666577; FB: Quydhsp
"Dạy toán 6-12, ôn thi lớp 10, Đại học tại Hà nội"

Câu	ĐÁP ÁN	
		1,00
I *(2 điểm)*	1. (*1,0 điểm*). *Học sinh tự giải.*	
	2. (*1,0 điểm*) *Chứng minh. …*	
	Phương trình của $\Delta: y = kx + 2$. Để Δ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $-x^3 + 3x + 2 = kx + 2$ (1) có 3 nghiệm phân biệt . Phương trình $x^3 + kx - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + k - 3) = 0$. Phương trình (1) có 3 nghiệm $\Leftrightarrow$ pt $x^2 + k - 3 = 0$ (2) có 2 nghiệm khác 0 $\Leftrightarrow k < 3$.	*0,50*
	Giả sử $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ trong đó x_1, x_2 là các nghiệm của (2). Theo định lý Viet ta có $x_1 + x_2 = 0 = 2x_I$ suy ra I là trung điểm của AB và từ (2) ta có $x^2 = 3 - k$. Gọi hệ số góc của các tiếp tuyến tại A và B là k_1, k_2 thì $k_i = y'(x_i) = -3x_i^2 + 3 = -3(3-k) + 3 = 3k - 6$ $(i = 1, 2)$ Suy ra $k_1 = k_2 \Rightarrow d_1 // d_2$ mà $IA = IB$ do đó $d(I, d_1) = d(I, d_2)$.	*0,50*
II *(1 điểm)*	1. (*1,0 điểm*) . *Giải phương trình …*	
	Pt $\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}(\cos x + \sin x)$ $\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(2\cos x - \sqrt{2}) = 0$.	*0,50*
	• Với $\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. • Với $2\cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$. Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.	*0,50*
III *(1 điểm)*	1. (*1,0 điểm*) . *Giải hệ phương trình ……………*	
	Điều kiện $x > 0, y > 0$. Đặt $t = \log_2 y \Rightarrow y = 2^t$, khi đó pt (1) trở thành $2^x + x = 2^t + t$. Do $x > 0$ nên $2^x + x > 1 \Rightarrow 2^t + t > 1 \Leftrightarrow 2^t > 1 - t$, nếu $t < 0$ thì $2^t < 1$, trong khi đó $1 - t > 1$ vô lý. Vậy $t \geq 0$. Xét hàm số $f(u) = 2^u + u$ trên $[0; +\infty)$, ta có $f'(u) = 2^u\ln 2 + 1 > 0$ nên hàm $f(u)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$. Suy ra $f(x) = f(t) \Leftrightarrow x = t$, tức là $x = \log_2 y \Leftrightarrow y = 2^x$.	*0,50*
	Với $y = 2^x$ thay vào pt (2) ta được $\log_2 x + 2^x = 5$. Nhận thấy hàm số $g(x) = \log_2 x + 2^x$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$. Suy ra phương trình $g(x) = 5$ có không quá một nghiệm. Mặt khác $g(2) = 5$. Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình $\log_2 x + 2^x = 5$. Với $x = 2$ thì $y = 4$ Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 4)$.	*0,50*
IV *(1 điểm)*	(*1,0 điểm*). *Tính tích phân ………*	
	Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}.\sqrt[3]{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}.dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan^2 x}}{\cos^4 x}.dx$. Đặt $\tan x = t \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + t^2)dx$. Khi $x = 0$ thì $t = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ thì $t = 1$.	*0,50*
	$\Rightarrow I = \int_0^1 (1 + t^2)t^{\frac{2}{3}}\,dt = \int_0^1 t^{\frac{2}{3}}dt + \int_0^1 t^{\frac{8}{3}}dt = \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}\Big\|_0^1 + \frac{3}{11}t^{\frac{11}{3}}\Big\|_0^1 = \frac{3}{5} + \frac{3}{11} = \frac{48}{55}$	*0,50*
V *(1 điểm)*	(*1,0 điểm*). *Tính bán kính mặt cầu ……….*	
	Gọi H là trung điểm của BC, do ΔABC và ΔSBC đều có cạnh bằng a, nên $AH = SH$, $AH \perp BC$, $SH \perp BC$. Suy ra (SAH) là mặt phẳng trung trực của cạnh BC và $\widehat{SAH} = 60^\circ$ khi đó ΔSAH đều cạnh bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Kéo dài AH cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại D thì $AD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.  	*0,50*

	Mặt phẳng (SAD) chứa các trục của hai tam giác ABC và SBC nên nó chứa tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, suy ra đường tròn ngoại tiếp ΔSAD là đường tròn lớn, do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔSAD cũng là bán kính của mặt cầu.	0,50
	Áp dụng định lý côsin trong ΔSAD ta có $SD^2 = SA^2 - 2SA.AD.\cos 60^\circ + AD^2 = \frac{13a^2}{12} \Rightarrow SD = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$. Áp dụng định lý sin trong ΔSAD ta có : $R = \frac{SD}{2\sin\widehat{SAD}} = \frac{SD}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{13}}{6}$.	
VI *(1 điểm)*	1. *(1,0 điểm). Tìm giá trị nhỏ nhất ………………*	
	Ta có $\sqrt{5}f(x) = \sqrt{(5x)^2+10^2} + \sqrt{(16-5x)^2+8^2} + \sqrt{(20-5x)^2+10^2} + \sqrt{(5x-4)^2+8^2}$ Xét các vectơ $\vec{a} = (5x;\,10)$, $\vec{b} = (16-5x;\,8)$, $\vec{c}\,(20-5x;\,10)$, $\vec{d}\,(5x-4;\,8)$.	0,50
	Khi đó $\sqrt{5}f(x) = \lvert\vec{a}\rvert + \lvert\vec{b}\rvert + \lvert\vec{c}\rvert + \lvert\vec{d}\rvert \ge \lvert\vec{a}+\vec{c}\rvert + \lvert\vec{b}+\vec{d}\rvert = 20\sqrt{2} + 20$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x}{10} = \frac{20-5x}{10} \\ \frac{16-5x}{8} = \frac{5x-4}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$ Vậy $\min f(x) = 4\sqrt{5}\,(\sqrt{2}+1)$ khi $x = 2$.	0,50
VII *(1 điểm)*	*(1,0 điểm). Tìm tọa độ các đỉnh B,C…………………*	
	Gọi M là trung điểm của BC thì $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM} \Rightarrow M(1;2)$. Kẻ đường kính AD của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, khi đó tứ giác $HBDC$ là hình bình hành và M là trung điểm của HD, suy ra $D(25;-13)$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, thì I là trung điểm của $AD \Rightarrow I(13;-4)$. Đường thẳng BC đi qua M vuông góc với $\overrightarrow{AH}(-24;12)$ nên có phương trình $24(x-1) - 12(y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0$.  	0,50
	Các điểm B, C thuộc đường thẳng BC. Đặt $B(x_B;\,2x_B)$, $C(x_C;\,2x_C)$. Ta có $IB = IC = IA \Leftrightarrow (x_B-13)^2 + (2x_B+4)^2 = (x_C-13)^2 + (2x_C+4)^2 = 225$ (*). Giải hệ (*) kết hợp với yêu cầu $x_B > x_C$ ta suy ra $x_B = 4, x_C = -2 \Rightarrow y_B = 8, y_C = -4$. Vậy $B(4;8)$, $C(-2;-4)$.	0,50
VIII *(1 điểm)*	*(1,0 điểm). Tính diện tích tam giác …………………*	
	Vì B, C thuộc mp(Oxz) nên $y_B = y_C = 0$ Điểm B thuộc d_1 nên $\frac{x_B-1}{3} = \frac{2}{-1} = \frac{z_B+1}{2} \Rightarrow B(-5;0;-5)$. Điểm C thuộc d_2 nên $\frac{x_C+3}{3} = \frac{-5}{-1} = \frac{z_C}{2} \Rightarrow C(12;0;10)$.	0,50
	Ta có $\overrightarrow{AB} = (-6;-2;-6)$, $\overrightarrow{AC} = (11;-2;9) \Rightarrow [\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}] = (-30;-12;34)$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}\lvert[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\rvert = 5\sqrt{22}$ (đvdt).	0,50
IX *(1 điểm)*	*(1,0 điểm). Viết về dạng lượng giác của số phức …………………*	
	Đặt $z = x + yi$. Khi đó $\frac{\bar{z}-i}{z-1} = 1-2i \Leftrightarrow \frac{x-(y+1)i}{(x-1)+yi} = 1-2i$ $\Leftrightarrow x-(y+1)i = x-1-2(x-1)i + yi + 2y \Leftrightarrow (1-2y) + (2x-2y-3)i = 0$	0,50
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y-3=0 \\ 1-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ Vậy $z = 2 + \frac{1}{2}i \Rightarrow z^2 = 4 + 2i - \frac{1}{4}$ Do đó $w = -\frac{3}{4} - 2z + z^2 = -\frac{3}{4} - 4 - i + 4 + 2i - \frac{1}{4} = -1 + i$. Suy ra dạng lượng giác của số phức $w = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i.\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.	0,50