TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI

TRƯỜNG THPT CHUYÊN - ĐHSP

ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC LẦN VII NĂM 2014

Môn thi : **TOÁN**

Thời gian làm bài : 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác cân.

Câu 2. *(1,0 điểm)*

Giải phương trình $\dfrac{\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)} = 1 + \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

Câu 3. *(1,0 điểm)*

Giải phương trình $2\log_2(1+\sqrt[4]{x}) = \log_3 x$.

Câu 4. *(1,0 điểm)*

Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x.\sin x.dx}{(1+\cos x)^2}$

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a$ là chiều cao, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B, có $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Tính thể tích hình chóp $S.ACD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

Câu 6. *(1,0 điểm)* Chứng minh rằng với các số x, y, z thuộc khoảng (0; 1), luôn có

$$(x-x^2)(y-y^2)(z-z^2) \geq (x-yz)(y-zx)(z-xy).$$

Câu 7.*(1,0 điểm)* Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh $A(2; 2)$, điểm $M(3; 6)$ thuộc cạnh BC, điểm $N(6; 4)$ thuộc cạnh CD. Tìm tọa độ đỉnh C.

Câu 8.*(1,0 điểm)* Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) : $2x - y + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+2}{-2}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm trên đường thẳng d và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) và mặt phẳng (P).

Câu 9. *(1,0 điểm)* Cho số phức $z = \cos 2\alpha + (\sin\alpha - \cos\alpha)i$, với số α thay đổi.

Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của $|z|$.

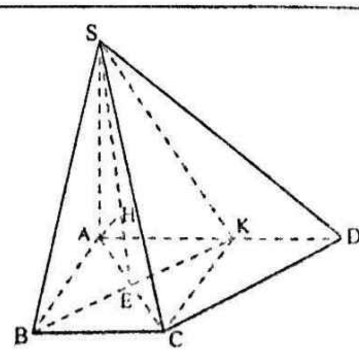
.... **Hết** ....

www.VNMATH.com

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM

THI THỬ ĐH LẦN VII - NĂM 2014

Gv.Ths Nguyễn Văn Quý - 0915 666 577
Toán 6-12; lớp 9 lên 10; ôn thi Đại học

Câu	ĐÁP ÁN	
	1. *(1,0 điểm). Học sinh tự giải.*	*1,00*
	2. *(1,0 điểm) Tìm điểm M. …*	
I *(2 điểm)*	Giả sử $M(x_o; y_o) \in (C) \Rightarrow x_o \neq 1,\ y_o = \frac{2x_0+1}{x_0-1}$. Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$. Phương trình tiếp tuyến tại M: $y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_o)+\frac{2x_0+1}{x_0-1}$. Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận đứng và tiệm cận ngang. Khi đó : • Với điểm A, ta có $x_1 = 1,\ y_1 = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(1-x_o)+\frac{2x_0+1}{x_0-1} \Leftrightarrow y_1 = \frac{2x_0+4}{x_0-1}$ • Với điểm B, ta có $y_2 = 2,\ x_2$ là nghiệm của PT : $2 = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x_2-x_o)+\frac{2x_0+1}{x_0-1} \Leftrightarrow x_2 = 2x_o - 1$.	*0,50*
	Tiệm cận đứng và tiệm cận ngang vuông góc với nhau, gọi $I(1; 2)$ là giao điểm của hai tiệm cận, thì tam giác IAB vuông cân tại $I \Rightarrow IA = IB \Leftrightarrow \left\lvert\frac{2x_0+4}{x_0-1}-2\right\rvert = \lvert(2x_o-1)-1\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\frac{6}{x_0-1}\right\rvert = 2\lvert x_o-1\rvert \Leftrightarrow x_o = 1 \pm \sqrt{3}$. Từ đó suy ra có hai điểm thỏa mãn : $M_1(1+\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$, $M_2(1-\sqrt{3}; 2-\sqrt{3})$.	*0,50*
	1. *(1,0 điểm) . Giải phương trình …*	
II *(1 điểm)*	Pt $\Leftrightarrow \frac{\sin x}{2\sin\frac{\pi}{6}.\cos x} = 1 + \frac{\sin x}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 1 + \frac{2\sin x}{\cos x + \cos\frac{\pi}{2}}$	*0,50*
	$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 1 + \frac{2\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \tan x = -1.$ Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.	*0,50*
	1. *(1,0 điểm) . Giải phương trình ………………*	
III *(1 điểm)*	Điều kiện : $x > 0$. PT $\Leftrightarrow 4\log_2(1+\sqrt[4]{x}) = 2\log_3 x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(1+\sqrt[4]{x}) = \frac{1}{4}\log_3 x \Leftrightarrow \log_2\sqrt{1+\sqrt[4]{x}} = \log_3\sqrt[4]{x}$. Đặt $t = \log_2\sqrt{1+\sqrt[4]{x}} = \log_3\sqrt[4]{x} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{1+\sqrt[4]{x}} = 2^t \\ \sqrt[4]{x} = 3^t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+\sqrt[4]{x} = 4^t \\ \sqrt[4]{x} = 3^t\end{cases}$	*0,50*
	$\Leftrightarrow \begin{cases}1+3^t = 4^t \\ \sqrt[4]{x} = 3^t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{1}{4}\right)^t + \left(\frac{3}{4}\right)^t = 1 \\ \sqrt[4]{x} = 3^t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = 1 \\ \sqrt[4]{x} = 3\end{cases}$ Đối chiếu với điều kiện, ta được nghiệm $x = 81$.	*0,50*
	(1,0 điểm). Tính tích phân ………	
IV *(1 điểm)*	Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,d\left(\frac{1}{1+\cos x}\right) = \frac{x}{1+\cos x}\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}.dx$.	*0,50*
	$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \frac{\pi}{2} - \tan\frac{x}{2}\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$. Vậy $I = \frac{\pi}{2} - 1$.	*0.50*
	(1,0 điểm). Tính thể tích khối cầu ………..	
V *(1 điểm)*	Gọi K là trung điểm của AD, theo giả thiết ta có $AK = BC = a$, $AK // BC$ và $\widehat{ABC} = 90^o$, suy ra tứ giác $ABCK$ là hình vuông $\Rightarrow CK$ là đường cao của ΔACD. Vậy $V_{S.ACD} = \frac{1}{3}SA.S_{ACD} = \frac{1}{3}.a^3$. 	*0,50*
	Ta có $BCDK$ là hình bình hành, nên $CD // (SBK)$; $KA = KD$ suy ra $d(SB,CD) = d\big(D,(SBK)\big) = d\big(A,(SBK)\big)$. Ta có $AS = AB = AK = a$, $SB = BK = KS = a\sqrt{2}$ nên $A.SBK$ là hình chóp đều. Gọi H là tâm ΔSBK, E là trung điểm của BK thì $AH \perp (SBK)$ và $AE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $AH = d(SB,CD)$. Trong ΔSAE : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AS^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.	*0,50*

www.VNMATH.com

VI (1 điểm)

1. *(1,0 điểm). Tìm các số thực ……………*

Do các số x, y, $z \in (0; 1)$ nên $x - x^2 > 0, y - y^2 > 0, z - z^2 > 0 \Rightarrow (x - yz)(y - zx)(z - xy) > 0$ (*)

Khi đó xảy ra các trường hợp :

- Hai trong ba số $x - yz, y - zx, z - xy$ là số dương, số còn lại âm khi đó bđt(*) mang dấu âm, nên loại.
- Một trong ba số là số dương, hai số còn lại âm. Giả sử $x - yz < 0,\ y - zx < 0$
  Khi đó $x + y - (x + y)z < 0 \Leftrightarrow (x + y)(1 - z) < 0 \Rightarrow 1 - z < 0 \Leftrightarrow z > 1$ vô lý.
- Ba số $x - yz, y - zx, z - xy$ là số âm, khi đó bđt(*) âm, không thỏa mãn (loại)
- Vậy ba số $x - yz, y - zx, z - xy$ đều là số dương .

0,50

Ta chứng minh $\sqrt{xy}(1 - z) \ge \sqrt{(x - yz)(y - zx)}$ (1) .

Thật vậy, (1) $\Leftrightarrow xy(1 - 2z + z^2) \ge xy - (x^2 + y^2)z + xyz^2 \Leftrightarrow (x - y)^2z \ge 0$ đúng, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Tương tự ta cũng có : $\sqrt{yz}(1 - x) \ge \sqrt{(y - zx)(z - xy)}$ (2) và $\sqrt{xz}(1 - y) \ge \sqrt{(x - yz)(z - xy)}$ (3).

Nhân từng vế của (1), (2), (3) ta được :

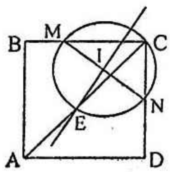
$(x - x^2)(y - y^2)(z - z^2) \ge (x - yz)(y - zx)(z - xy)$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ (đpcm).

0,50

VII (1 điểm)

(1,0 điểm). Tìm tọa độ đỉnh C……………

Gọi $I(\frac{9}{2}; 5)$ là trung điểm của *MN*. Do $\widehat{MCN} = 90^\circ$ nên *C* thuộc đường tròn tâm *I* đường kính *MN*. Ta có *CA* là tia phân giác của góc $\widehat{MCN}$, nên giao điểm *E* của tia *CA* với đường tròn (*I*) là điểm chính giữa cung $\widehat{MN}$ không chứa *C* (các điểm *A* và *E* nằm cùng phía đối với đường thẳng *MN*). Suy ra *E* là giao điểm của đường tròn (*I*) và trung trực của đoạn thẳng *MN*.



Phương trình đường tròn (*I*) : $\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (y - 5)^2 = \frac{13}{4}$.

Đường thẳng trung trực của *MN* : $3\left(x - \frac{9}{2}\right) - 2(y - 5) = 0$.

0,50

Tọa độ điểm *E* là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (y - 5)^2 = \frac{13}{4} \\ 3\left(x - \frac{9}{2}\right) - 2(y - 5) = 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta được $(x; y) = \left(\frac{11}{2}; \frac{13}{2}\right), \left(\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right)$. Đặt $E_1\left(\frac{11}{2}; \frac{13}{2}\right), E_2\left(\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

Phương trình đường thẳng *MN* : $2x + 3y - 24 = 0$.

Thay tọa độ của điểm *A*, E_1, E_2 vào phương trình của đường thẳng *MN* ta suy ra *A* và E_2 cùng phía đối với *MN*.

Phương trình *AE* : $x - y = 0$.

Ta có *C* là giao điểm thứ hai của *AE* với (*I*). Tọa độ của điểm *C* là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (y - 5)^2 = \frac{13}{4} \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x; y) = (6; 6).$$

Vậy tọa điểm *C* là (6; 6).

0,50

VIII (1 điểm)

(1,0 điểm). Viết phương trình mặt cầu ……………

Gọi *I*, *r* là tâm và bán kính của mặt cầu (*S*), do $I \in d \Rightarrow I(2 + t; 3 + 2t; -2 - 2t)$.

Mặt cầu (*S*) tiếp xúc với (*P*) và (*Oxy*) khi và chỉ khi $d(I, (P)) = d(I, (Oxy)) = r$

$$\Leftrightarrow r = \frac{|-2-2t|}{\sqrt{0+0+1}} = \frac{|2(2+t)-(3+2t)+2(-2-2t)+1|}{\sqrt{4+1+4}}$$

0,50

$$\Leftrightarrow r = 2|1 + t| = \frac{2|1+2t|}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2,\ r = 2 \\ t = -\frac{4}{5},\ r = \frac{2}{5} \end{array}\right.$$

Với $t = -2$ thì $I(0; -1; 2) \Rightarrow (S): x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 4$.

Với $t = -\frac{4}{5}$ thì $I\left(\frac{6}{5}; \frac{7}{5}; -\frac{2}{5}\right) \Rightarrow (S): \left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(x - \frac{7}{5}\right)^2 + \left(x + \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$.

0,50

IX (1 điểm)

(1,0 điểm). Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất ……………

Ta có $|z| = \sqrt{\cos^2 2\alpha + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2} = \sqrt{\cos^2 2\alpha - \sin 2\alpha + 1} = \sqrt{-\sin^2 2\alpha - \sin 2\alpha + 2}$

Đặt $t = \sin 2\alpha$, $-1 \le t \le 1$. Xét hàm số $f(t) = -t^2 - t + 2$, $t \in [-1; 1]$.

0.50

Ta có $f'(t) = -2t - 1 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$. Ta có $f(1) = 0$, $f(-1) = 2$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

Suy ra $\max f(t) = \frac{9}{4}$ khi $t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ \alpha = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$ $(k \in Z)$.

$\min f(t) = 0$ khi $t = 1 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in Z)$.

Vậy $\max |z| = \frac{3}{2}$, $\min |z| = 0$.

0,50

Gv.Ths Nguyễn Văn Quý - 0915 666 577
Toán 6-12; lớp 9 lên 10; ôn thi Đại học